

Panneaux fléchissants Absorption d'un diagramme

Frédéric Poirrier
Juin 2017

L'absorption des matériaux poreux a fait l'objet d'une première approche dans «Alpha Sabine» où il apparaissait que les laines minérales utilisées en forte épaisseur, pouvaient servir à la réduction des modes stationnaires des petites salles.

Une autre façon de traiter les basses fréquences est de recourir à des absorbeurs électroacoustiques, passif ou actif, dont l'intérêt réside surtout dans la fiabilité des modèles de calculs, car ceux-ci se mènent à partir des paramètres de *Thiele & Small* des haut-parleurs. Ces caractéristiques figurent dans les documentations techniques, ou à défaut, peuvent se mesurer aisément. Cependant, la faible surface émissive des membranes des haut-parleurs limite fortement l'efficacité de ces dispositifs.

On s'intéresse maintenant au fonctionnement des panneaux fléchissants assez peu documentés sur le Web. Les diagrammes accordés, comme les absorbeurs électroacoustiques, ayant pour principal attrait de posséder une absorption sélective qui n'affecte pas le haut du spectre, contrairement aux laines minérales et aux mousses.

Dans une démarche d'acoustique prédictive, il s'avère absolument nécessaire de pouvoir déterminer la fréquence d'accord d'un panneau fléchissant en ayant une parfaite connaissance des biais pouvant impacter son efficacité. Pour ce faire, on abordera dans un premier temps, les équations du modèle habituel d'un diagramme accordé fonctionnant en mode piston parfait puis on introduira un effet fléchissant de la membrane. Après quoi, on étudiera le fonctionnement d'un diagramme superposé et on cherchera à estimer l'effet membrane d'un panneau perforé.

Notons que ce travail, malgré son formalisme apparent, espère déboucher sur des règles pratiques utiles à la conception de panneaux accordés.

Sommaire :

1) Modèle Masse-Ressort	
a) Formule simplifiée	3
b) Prise en compte de la masse de rayonnement	4
c) Coefficient d'absorption avec prise en compte de l'amortissement de la cavité	5
d) Influence de la résistivité au passage de l'air du matériau absorbant dans la cavité ..	10
2) Modèle Fléchissant	
a) Coefficient de raideur de la plaque	12
b) Fréquence d'accord	14
c) Coefficient d'absorption dans le modèle fléchissant amorti	16
3) Modèle Fléchissant Superposé	
a) Fréquences d'accords	20
b) Coefficient d'absorption du dispositif amortisseur	21
4) Diagramme Perforé	
a) Fréquence d'accord du diagramme perforé non amorti	27
b) Coefficient d'absorption du diagramme perforé amorti	28
5) Diagramme Perforé en fonctionnement hybride, Helmholtz-Membrane	
a) Modèle simplifié	31
b) Modèle avec mise en parallèle des impédances de plaque	32
6) Conclusion	34
Annexe A : L'oscillateur harmonique en régime forcé- Impédance mécanique	35
Annexe B : Notion d'impédance acoustique spécifique	38

1) Modèle Masse-Ressort

a) Formule simplifiée

En première approximation, le modèle mécanique équivalent d'un panneau « fléchissant » est celui d'un système masse-ressort où la masse est constituée par le panneau et la raideur du ressort créée par l'air enfermée dans la cavité. On fait l'hypothèse que le panneau fonctionne comme un piston parfait, c'est-à-dire sans déformation et sans frottement, en oscillant librement. On suppose aussi que l'onde acoustique arrive en tout point du panneau, en phase, ce qui est toujours le cas pour une onde plane arrivant sous incidence normale.

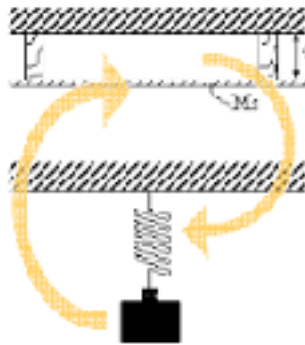


Figure 1

Ainsi, la fréquence d'accord du système masse-ressort, notée f_0 , est donnée par la relation suivante :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_a}{m_s}} \quad (1)$$

- m_s étant la masse surfacique du panneau, exprimée en kg/m^2
- k_a la raideur de l'air de la cavité, par unité de surface, exprimée en N/m^3 , avec :

$$k_a = \frac{\rho_0 c^2}{d} \quad (2)$$

- ρ_0 est la masse volumique de l'air. À température et pression standards, $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$
- c est la célérité du son ; $c = 342 \text{ m/s}$
- d est la profondeur de la cavité, exprimée en m

En substituant la raideur k_a dans (1) par son expression (2), il vient aisément que :

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_0}{m_s d}} \quad (3)$$

Puis en calculant avec les constantes, on retrouve la formule simplifiée rencontrée sur le Web et dans la littérature :

$$f_0 \approx \frac{60}{\sqrt{m_s d}} \quad (4)$$

Cette formule simplifiée suppose que le panneau fonctionne en mode piston, ce qui constitue un modèle assez grossier du fonctionnement d'un panneau fléchissant !

Par exemple, considérerons un diagramme accordé composé d'un panneau de **contre-plaqué**, d'épaisseur $h = 10 \text{ mm}$, de masse volumique $\rho_v = 600 \text{ kg/m}^3$ posé devant une cavité de profondeur $d = 100 \text{ mm}$.

Avec cette configuration, la formule simplifiée (4) donne un accord :

$$fc = 77 \text{ Hz}$$

Dans la suite de l'exposé, nous allons chercher à parfaire le modèle en incluant des termes physiques intervenant dans le fonctionnement du diagramme afin d'en améliorer la prévision.

b) Prise en compte de la masse de rayonnement

Une première amélioration consiste à prendre en compte la masse de rayonnement du panneau qui n'est autre qu'un effet de la masse de l'air en contact avec le diagramme. Cette masse de rayonnement, notée m_r , s'ajoute simplement à la masse du panneau.

La masse de rayonnement d'un panneau circulaire est donnée en fonction de l'aire de la membrane S , par :

$$m_r = \frac{8\rho_0}{3} \left(\frac{S}{\pi}\right)^{3/2} \quad (5)$$

En exprimant cette dernière par unité de surface, il vient :

$$m_r = \frac{8\rho_0}{3} \left(\frac{S}{\pi^3} \right)^{1/2} \quad (6)$$

Ainsi pour un panneau rectangulaire de dimensions X et Y , de forme assez proche du carré (géométrie assez « voisine » du disque), il vient :

$$m_r \approx \frac{8\rho_0}{3} \left(\frac{XY}{\pi^3} \right)^{1/2} \approx 0,57 \sqrt{XY} \quad (7)$$

Dès lors, la masse surfacique du panneau, se corrige ainsi:

$$m_{\text{corrigée}} = \rho_v h + 0,57 \sqrt{XY} \quad (8)$$

où

- ρ_v est la masse volumique du panneau, exprimée en kg/m^3
- h est l'épaisseur du panneau, exprimée en m
- X et Y sont respectivement, la longueur et la largeur du panneau, exprimées en m

Cette correction de la masse surfacique, qui prend en compte la masse de rayonnement, est une approximation qui n'a de signification que pour des géométries de panneaux proches de celle du carré car la relation (5) n'est formellement exacte que pour un diagramme circulaire. Il n'existe pas, à ma connaissance de formulation analytique de la masse de rayonnement d'une plaque rectangulaire.

En reprenant l'exemple précédant, CP de 10 mm devant un plénum de 100 mm, avec $X = Y = 1$ m, la masse surfacique corrigée du panneau est de $6,57 \text{ kg/m}^2$ et la fréquence d'accord diminue pour donner 74 Hz, au lieu de 77 Hz, ce qui induit un écart de l'ordre de 4 % sur la fréquence d'accord, dans le cas présent.

c) Coefficient d'absorption avec prise en compte de l'amortissement de la cavité

Certains auteurs, pour prendre en compte la présence d'un matériau absorbant dans la cavité, absolument nécessaire pour dissiper l'énergie, apportent une correction à la relation (4) et proposent, la formule suivante:

$$f_0 \approx \frac{50}{\sqrt{m_s d}} \quad (9)$$

Où m_s est la masse surfacique de la membrane, corrigée ou non, de la masse de rayonnement.

Il est néanmoins possible de modéliser le fonctionnement du système **masse-ressort amorti** en exprimant le coefficient d'absorption en énergie sous incidence normale α_n , en utilisant la méthode de l'impédance de ramenée. La démarche a été décrite en détails dans l'article « alpha Sabine » :

<http://www.conseils-acoustique.com/images/articles/alpha-sabine.pdf>

Il s'agit, pour résumer, de ramener l'impédance acoustique du fond de la cavité sur la face externe de la membrane. En supposant le fond de la cavité parfaitement rigide, c'est-à-dire d'impédance infinie, on obtiendrait pour impédance acoustique spécifique de la membrane chargée par sa cavité amortie, notée Z , la relation suivante :

$$Z = R + j \left(m_s \omega - \frac{Z_m}{\tan(k_m d)} \right) \quad (10)$$

Où

- R est la résistance mécanique par unité de surface des éléments compliants autres que ceux apportés par le matériau absorbant. Ce terme résistif correspond aux dissipations structurelles et aux fuites entre les raccords. En première approximation, on peut supposer que ce terme est négligeable devant la résistance amenée par le matériau absorbant et poser $R \approx 0$.
- m_s est la masse surfacique du panneau, corrigée ou non, de la masse de rayonnement
- k_m et Z_m sont, respectivement, le **nombre d'onde** et l'**impédance acoustique caractéristique** du matériau absorbant, deux grandeurs complexes qui se calculent avec les formulations de **Delany & Bazley** ou tout autre modèle (Miki, Mechel & Grundmann ...).

Le modèle de Delany & Bazley présente l'avantage de caractériser l'impédance du matériau poreux, à une fréquence donnée, en fonction d'un paramètre unique, la **résistivité à l'écoulement de l'air**, notée σ , qui s'exprime en Pa.s/m²

Ils proposent les deux relations suivantes.

Pour l'impédance acoustique caractéristique :

$$Z_m = \rho_0 c \left(1 + 0,0571 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,754} - 0,087 j \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,732} \right) \quad (11)$$

et le nombre d'onde :

$$k_m = \frac{\omega}{c} \left(1 + 0,0978 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,700} - 0,189 j \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,595} \right) \quad (12)$$

Où $\rho_0 \frac{f}{\sigma}$ est une quantité sans dimension.

En réalité, les formulations figurant ci-dessus sont celles d'**Allard & Champoux** (1990) qui ont apporté quelques corrections aux coefficients des relations initialement établies par **Delany & Bazley**.

Dans la suite de l'exposé, les simulations seront effectuées avec les formulations de **Miki** :

$$Z_m = \rho_0 c \left(1 + 0,0699 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,632} - 0,1071 j \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,632} \right) \quad (13)$$

$$k_m = \frac{\omega}{c} \left(1 + 0,1093 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,618} - 0,1597 j \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,618} \right) \quad (14)$$

Digression :

Dans le cas d'un diagramme dépourvu de matériau absorbant, c'est-à-dire avec $\sigma = 0$ dans les formulations figurant ci-dessus, on retrouve l'impédance acoustique caractéristique de l'air, $Z_{air} = \rho_0 c$ et le nombre d'onde $k = \omega/c$. Dans ce cas, la relation (10) devient:

$$Z = R + j \left(m_s \omega - \frac{\rho_0 c}{\tan(kd)} \right) \quad (15)$$

En recherchant la pulsation qui annule la partie imaginaire, c'est-à-dire en résolvant :

$$m_s \omega - \frac{\rho_0 c}{\tan(kd)} = 0 \quad (16)$$

et en appliquant l'approximation basse fréquence $kd \ll 1$, $\tan(kd) \approx kd = \frac{\omega d}{c}$, l'équation (16) s'écrit :

$$m_s \omega - \frac{\rho_0 c^2}{\omega d} = 0 \quad (17)$$

On retrouve après un bref calcul, la formule simplifiée (4) :

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_0}{m_s d}} \approx \frac{60}{\sqrt{m_s d}} \quad (18)$$

On avait montré dans l'exposé « Alpha Sabine » que le coefficient d'absorption en énergie sous incidence normale, s'écrivait à l'interface air-matériau, en fonction du coefficient de réflexion en pression R_p :

$$\alpha_n = 1 - |R_p|^2 \quad (19)$$

avec

$$R_p = \frac{Z - \rho_0 c}{Z + \rho_0 c} \quad (20)$$

En substituant Z par son expression (10), on déduit R_p puis le coefficient α_n :

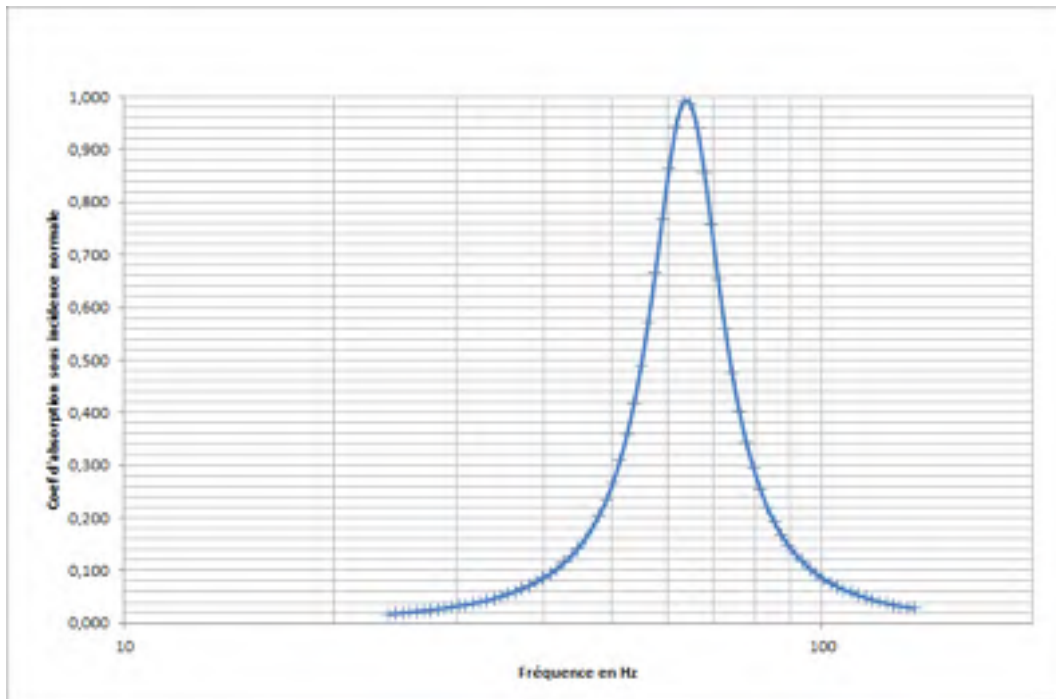
$$\alpha_n = 1 - \left| \frac{R + j \left(m_s \omega - \frac{Z_m}{\tan(k_m d)} \right) - \rho_0 c}{R + j \left(m_s \omega - \frac{Z_m}{\tan(k_m d)} \right) + \rho_0 c} \right|^2 \quad (21)$$

Cette dernière expression, exprime le coefficient d'absorption sous incidence normale du diagramme dans le modèle masse-ressort (piston parfait) avec prise en compte :

- Éventuellement, de la masse de rayonnement $m_{s,corrigée} = \rho_v h + 0,57 \sqrt{XY}$
- Éventuellement, des dissipations structurelles par l'intermédiaire de terme R
- De l'amortissement de la cavité avec les termes complexes Z_m et k_m

Des lors, la détermination de la fréquence d'accord du diagramme s'effectue par des méthodes, graphique ou numérique, à l'aide des expressions (21), (13) et (14).

En considérant le diagramme accordé précédent, c'est-à-dire en contre-plaqué de 10 mm devant un plénum de 100 mm amorti, d'après la relation (21), les coefficients d'absorption sous incidence normale sont donnés par la courbe ci-dessous, dont on déduit la fréquence d'accord de 63 Hz :



CP de 10 mm, plénum 100 mm amorti par une LdV de résistivité 10000 Pa.s/m² avec correction de la masse de rayonnement, X=Y=1,00 m et R=0, fonctionnant en mode piston (k_m et Z_m déterminés selon Miki).

Le tableau ci-dessous compare les fréquences d'accord calculées avec les différentes formules, avec ou sans prise en compte de la masse de rayonnement :

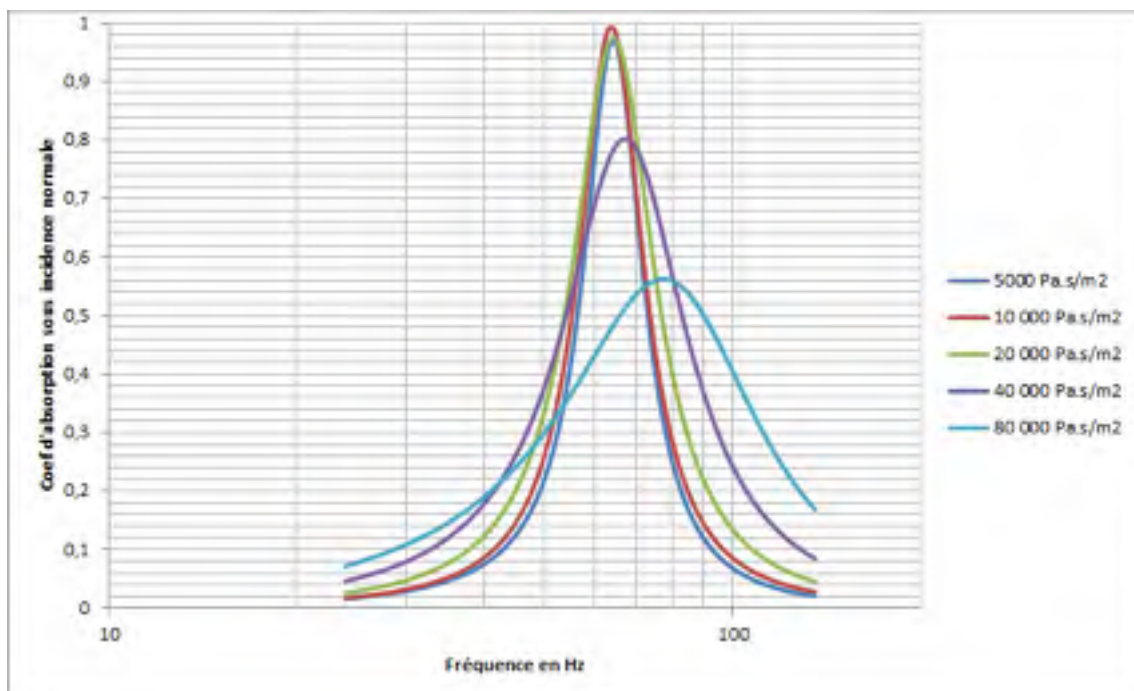
Formule	Fréquence d'accord sans correction de la masse de rayonnement	Fréquence d'accord avec correction de la masse de rayonnement
$f_0 \approx \frac{60}{\sqrt{md}}$ (4)	77,5 Hz	74,0 Hz
$f_0 \approx \frac{50}{\sqrt{md}}$ (9)	64,5 Hz	61,7 Hz
Expression (21)	66 Hz	63 Hz

Les écarts sont conséquents ! La formule simplifiée (4) est d'emblée hors jeu. Malgré tout, la relation (9) donne déjà une assez bonne estimation de la fréquence d'accord par rapport au modèle (21) qui intègre la prise en compte de la laine minérale dans la cavité.

d) Influence de la résistivité au passage de l'air du matériau absorbant dans la cavité

Il peut être intéressant d'observer l'incidence de la résistivité au passage de l'air du matériau absorbant présent dans la cavité sur le fonctionnement du diagramme.

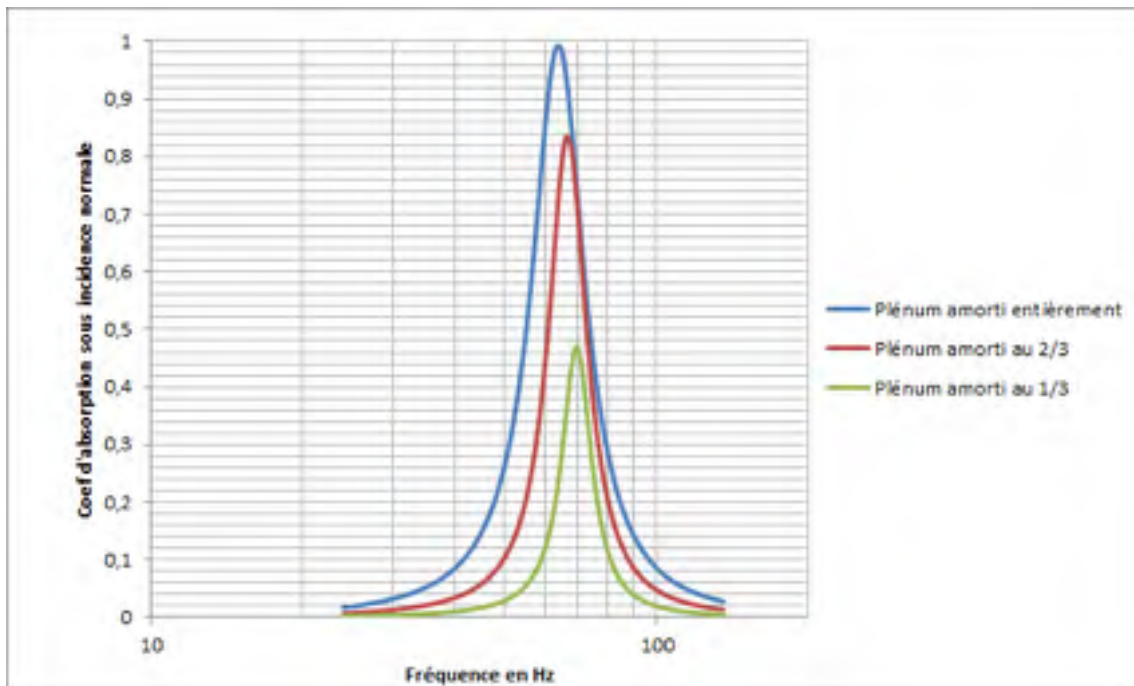
Le graphique suivant, indique les coefficients d'absorption sous incidence normale α_n en fonction de la fréquence, pour cinq valeurs de résistivité au passage de l'air.



CP de 10 mm, plénum 100 mm amorti par une LdV avec correction de la masse de rayonnement, $X=Y=1,00$ m et $R=0$, fonctionnant en mode piston (k_m et Z_m déterminés selon Miki)

Il apparaît clairement que le dispositif sera optimum avec des laines de faible résistivité, inférieure à $20\,000\text{ Pa.s/m}^2$, idéalement de l'ordre de $10\,000\text{ Pa.s/m}^2$ valeurs correspondant souvent à des laines minérales légères. Sauf, à vouloir élargir la bande fréquentielle, dans ce cas on privilégiera les laines à forte résistivité au détriment de l'efficacité.

Le graphique ci-après compare l'efficacité du diagramme amorti en fonction de la proportion d'épaisseur de laine minérale contenue dans le plénum.



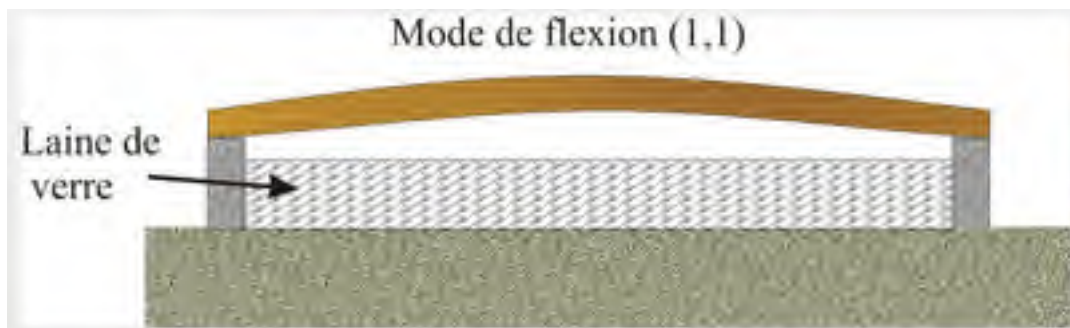
CP de 10 mm, plénum 100 mm amorti par une LdV de résistivité 10000 Pa.s/m², X=Y=1,00 m et R=0, fonctionnant en mode piston (k_m et Z_m déterminés selon Miki).

La configuration la plus favorable est celle où la cavité est totalement remplie. Mais en pratique, il faut prendre garde à ce que la laine ne vienne pas au contact de la membrane pour ne pas altérer son mouvement.

2) Modèle Fléchissant

a) Coefficient de raideur de la plaque

Jacques Jouhaneau, auteur de nombreux ouvrages d'acoustique, ancien titulaire de la chaire acoustique du CNAM, propose de parfaire le modèle du diagramme accordé en introduisant un effet fléchissant du panneau. Pour ce faire, il ne considère que le mode de flexion fondamental (1;1) de la plaque, considéré comme prépondérant dans le fonctionnement du diagramme.



(figure 2)

Des lors, il convient d'introduire aux équations précédentes, un terme de raideur de plaque qui dépend de la façon dont est fixé le panneau sur son pourtour.

On distingue deux modes de fixations :

- **Posé**, plaque libre de tout mouvement en périphérie.
- **Encastré**, plaque immobile en périphérie.

Avec un coefficient de raideur, par unité de surface, valant :

- $K_{11} = a_{11}^2 B$ pour le mode **posé** (22)
- $K_{11} = b_{11}^2 B$ pour le mode **encastré** (23)

Pour une plaque de dimensions X et Y, on a :

- a_{11} coefficient caractéristique de la plaque « posée » vibrant suivant le mode fondamental :

$$a_{11} = \pi^2 \sqrt{\frac{I}{X^2} + \frac{I}{Y^2}} \quad (24)$$

- b_{11} coefficient caractéristique de la plaque « encastrée » vibrant suivant le mode fondamental:

$$b_{11} \approx 22,385 \sqrt{\frac{I}{X^4} + \frac{I}{Y^4} + \frac{0,6}{X^2 Y^2}} \quad (25)$$

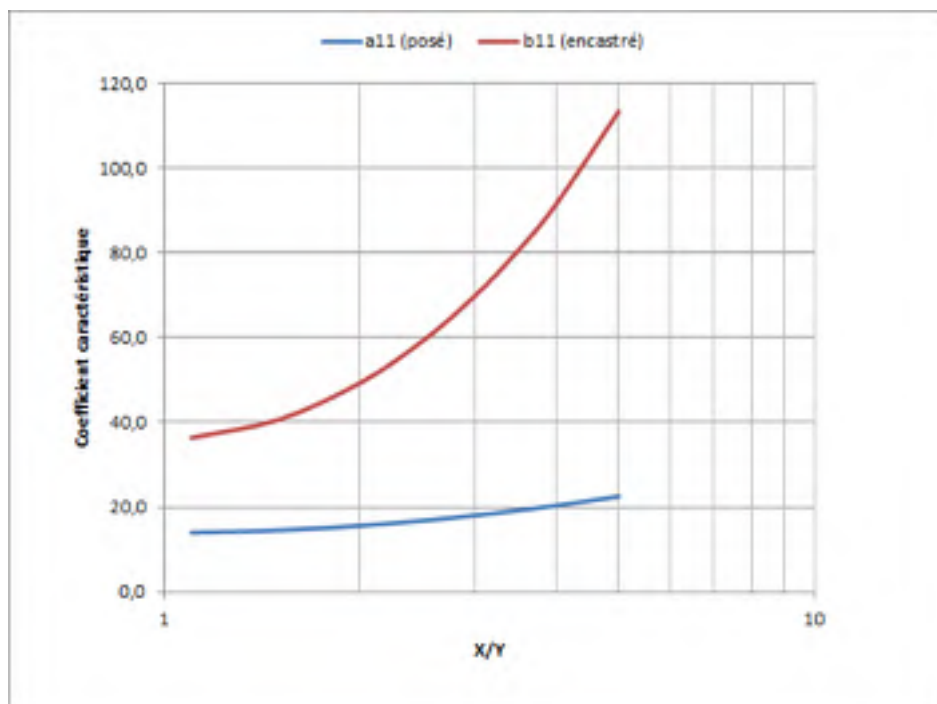
- B module de flexion de la plaque, exprimé en Nm:

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (26)$$

où

- E est le module de Young, exprimé en Pa
- h l'épaisseur de la plaque, exprimée en m
- ν le coefficient de Poisson

En exprimant les coefficients caractéristiques a_{11} et b_{11} en fonction du rapport X/Y , on peut apprécier l'incidence du mode de pose sur la raideur de la plaque :



Coefficients caractéristiques d'une plaque de dimensions $XY=1 \text{ m}^2$

Une plaque posée aura une raideur assez peu dépendante de ces dimensions. À contrario, en mode encastré, la raideur augmentera fortement avec le rapport X/Y .

b) Fréquence d'accord

En ajoutant le terme de raideur de plaque K_{11} à la formule (1), la fréquence d'accord pour le diagramme non amorti avec effet fléchissant, devient alors :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{11} + k_a}{m_s}} \quad (27)$$

Soit encore avec (2), (22) et (23)

- Pour la **plaque posée** :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a_{11}^2 B + \frac{\rho_0 c^2}{d}}{m_s}} \quad (28)$$

- Pour la **plaque encadrée**

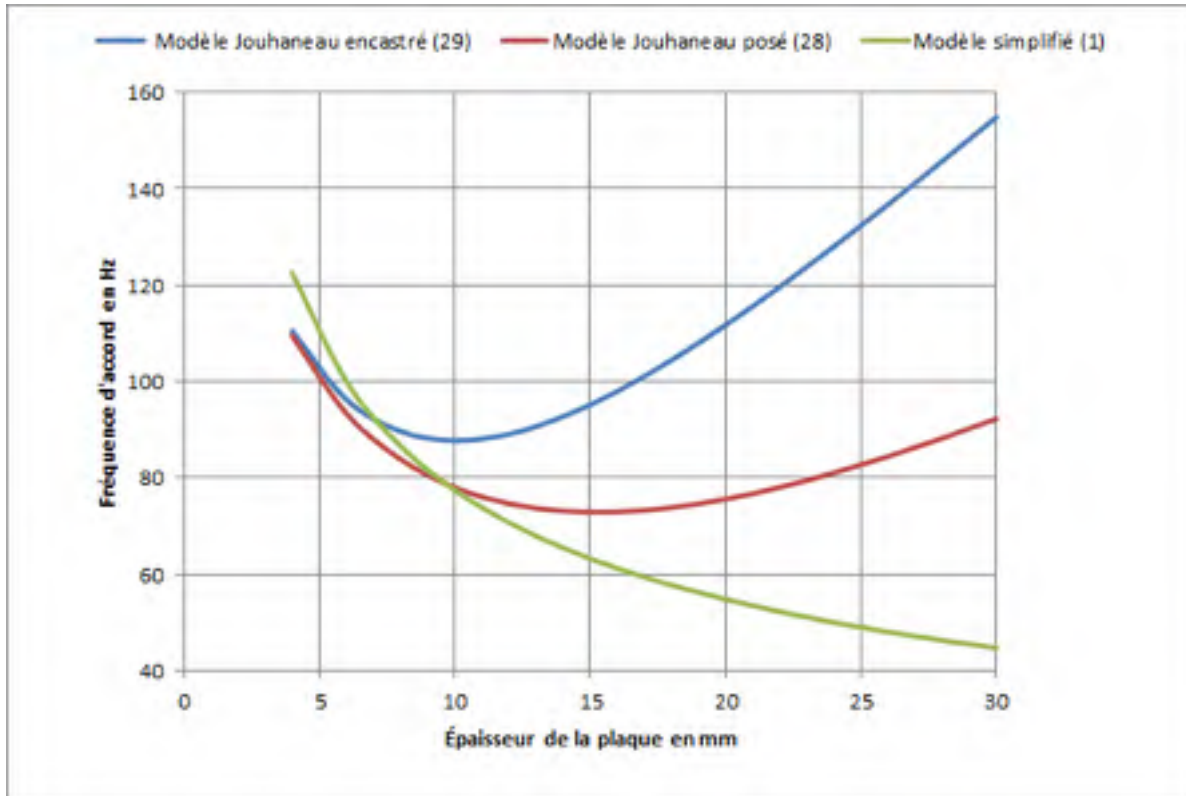
$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{b_{11}^2 B + \frac{\rho_0 c^2}{d}}{m_s}} \quad (29)$$

Pour une plaque de contre-plaqué, les caractéristiques mécaniques sont assez bien documentées. On adoptera dans le suite de l'exposé, les valeurs suivantes :

- **Module de Young : $E = 5,5 \text{ GPa}$**
- **Coefficient de Poisson : $\nu = 0,07$**
- **Masse volumique : $\rho_v = 600 \text{ kg/m}^3$**

Comparons l'effet de l'épaisseur du panneau sur la fréquence d'accord du diagramme :

Le graphique ci-dessous donne la fréquence d'accord d'un diagramme non amorti en fonction de l'épaisseur de la plaque selon les modes de pose, posé ou encadré :



CP devant plénum 100 mm non amorti, $X=Y=1,00$ m fonctionnant en mode fléchissant ou piston

Dans le modèle du piston parfait (formule simplifiée (1)) la fréquence d'accord diminue avec l'augmentation de l'épaisseur. En effet, la masse surfacique m_s augmente avec l'épaisseur alors que la raideur de l'air de la cavité k_a reste constante car indépendante de l'épaisseur de la plaque.

A contrario, en introduisant un effet fléchissant, cette règle n'est plus de mise et on remarque une remontée de la fréquence d'accord à partir d'une certaine épaisseur caractéristique, de 10 ou 16 mm selon le mode de pose, dans le cas présent. Ce résultat est lié au fait que le module de flexion B (26), et par voie de conséquence la raideur de la plaque K_{II} , sont proportionnels au cube de l'épaisseur du panneau alors que la masse surfacique est seulement proportionnelle à l'épaisseur du panneau. **La raideur du panneau croît plus vite avec l'épaisseur que la masse surfacique et son action devient prépondérante.**

Par ailleurs, le mode de fixation du panneau (posé ou encastré), influe assez peu sur la fréquence d'accord pour de faibles épaisseurs de plaques (4 à 5 mm pour du contre-plaqué). En effet, pour de faibles épaisseurs, la raideur de la plaque K_{II} , posée ou encastrée, est bien inférieure à la raideur de l'air k_a contenue dans le plénum. Dans ce cas, son action devient négligeable devant celle de la raideur de cavité.

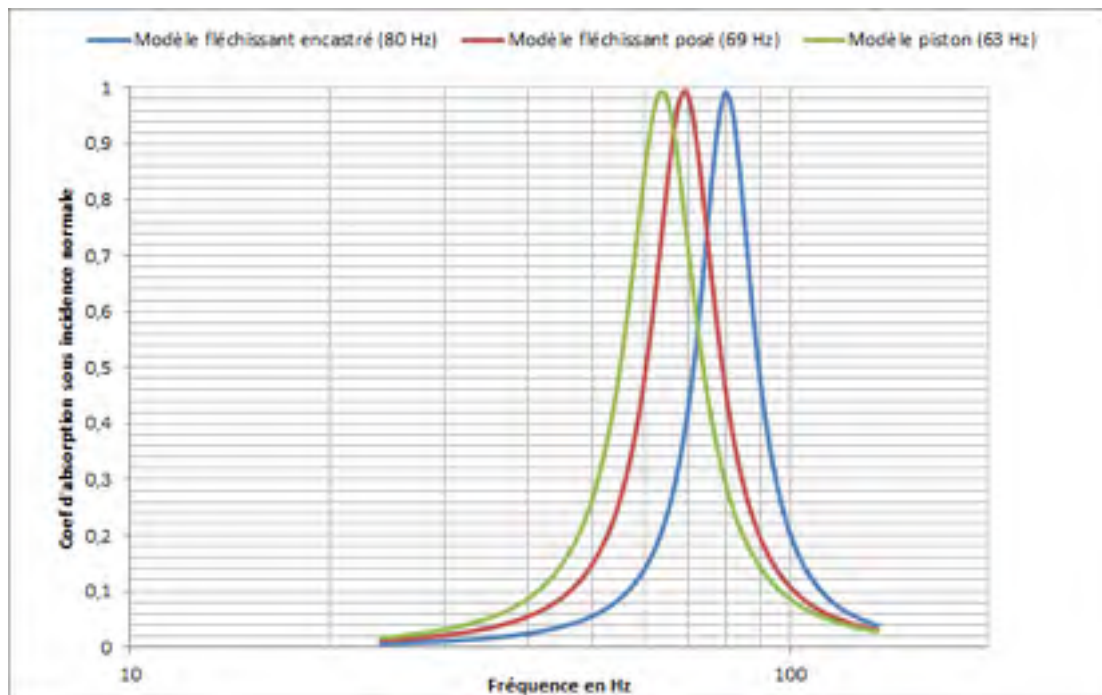
c) Coefficient d'absorption dans le modèle fléchissant amorti

En incluant, le terme de raideur de plaque K_{11} , la formule (21) devient :

$$\alpha_n = 1 - \frac{\left| R + j \left(m_s \omega - \frac{K_{11}}{\omega} - \frac{Z_m}{\tan(k_m d)} \right) - \rho_0 c \right|^2}{\left| R + j \left(m_s \omega - \frac{K_{11}}{\omega} - \frac{Z_m}{\tan(k_m d)} \right) + \rho_0 c \right|^2} \quad (30)$$

De ce fait, il devient aisé de comparer les courbes d'absorption, dans plusieurs configurations afin d'apprécier l'incidence des grandeurs d'entrée sur l'absorption, par exemple :

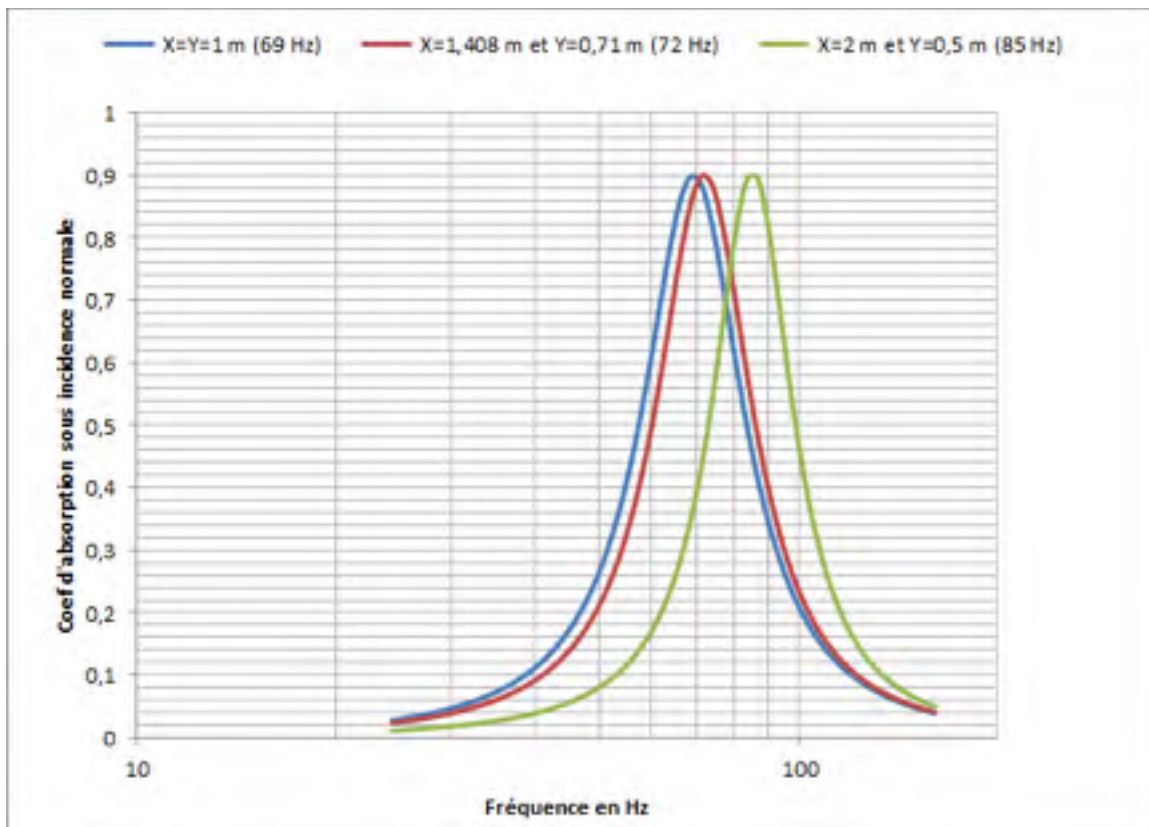
- Avec le mode de pose :



CP de 10 mm, plénum 100 mm amorti par une LdV de résistivité 10 000 Pa.s/m², X=Y=1,00 m et R=0, fonctionnant en mode fléchissant ou piston (k_m et Z_m déterminés selon Miki).

On s'aperçoit qu'il existe une forte dépendance au mode de pose !

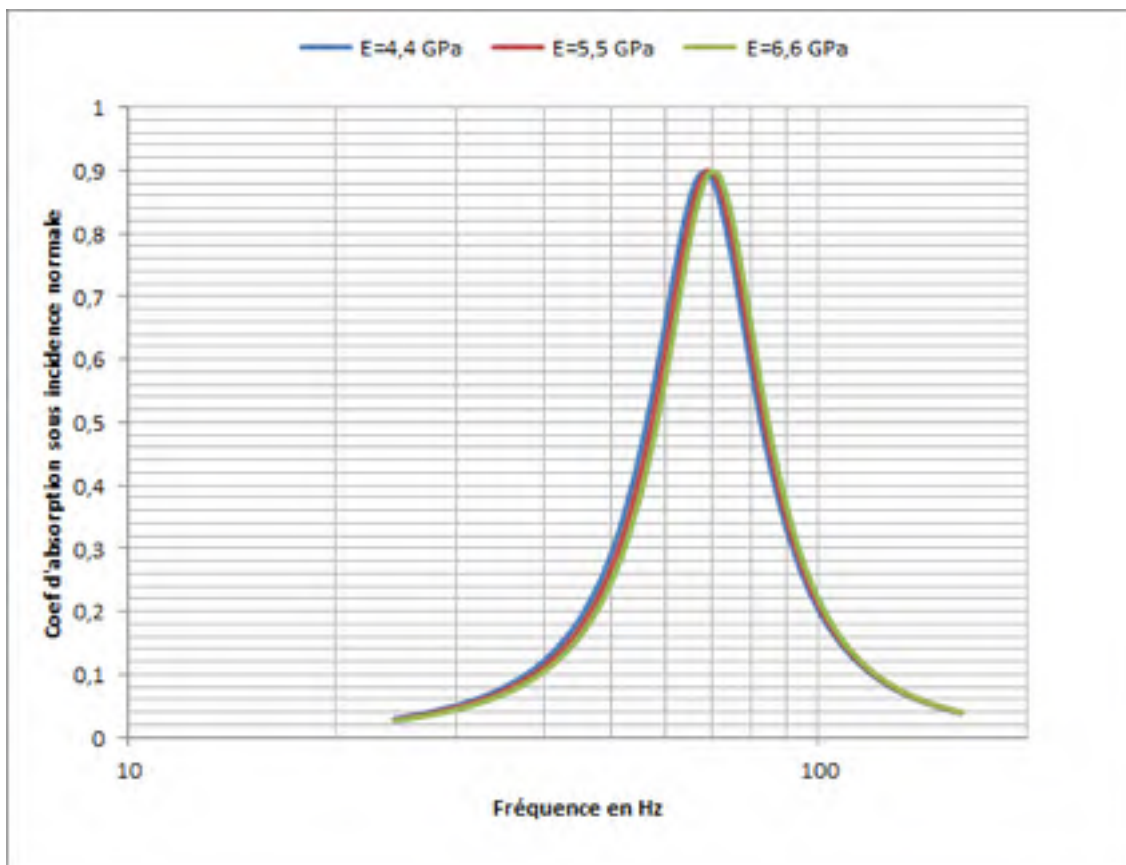
- Avec les dimensions du panneau :



CP de 10 mm, plénum 100 mm amorti par une LdV de résistivité 10000 Pa.s/m², XY = 1 m² et R=0, fonctionnant en mode fléchissant posé (k_m et Z_m déterminés selon Miki).

De même, il existe une forte dépendance de la fréquence d'accord aux dimensions du panneau. Le terme de raideur K_{II} devenant important avec le rapport croissant de X/Y .

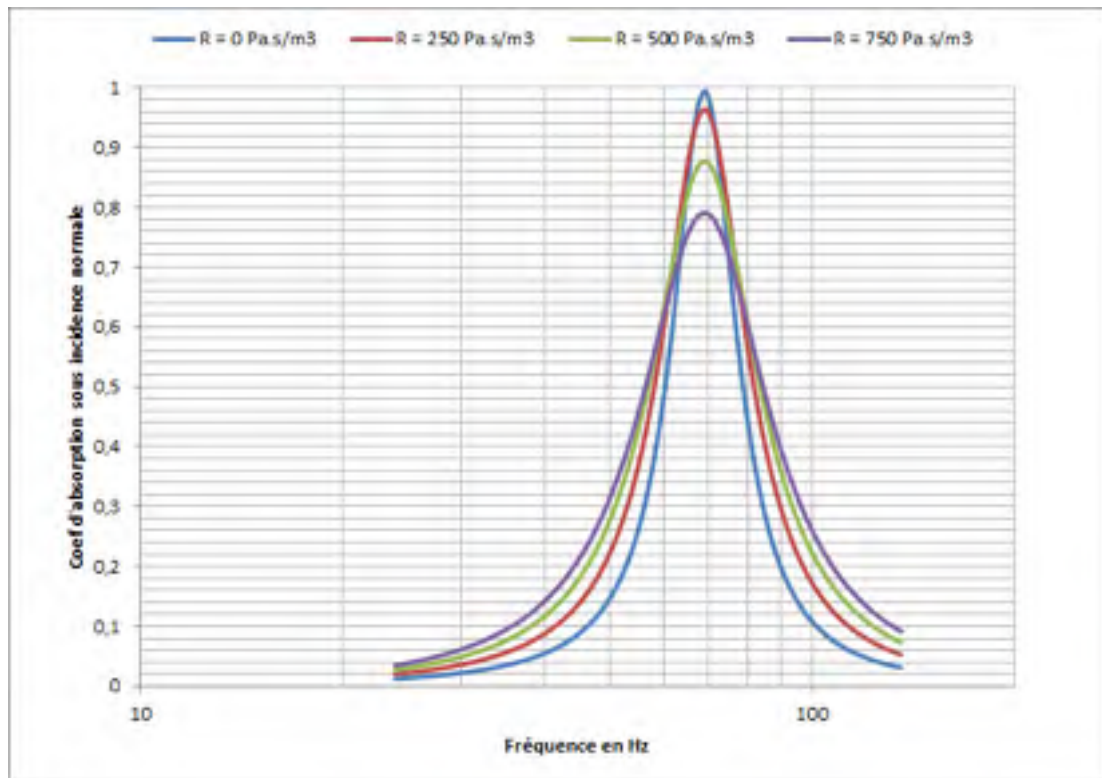
- Avec la variabilité du module de Young E :



CP de 10 mm, plénum 100 mm amorti par une LdV de résistivité 10000 Pa.s/m^2 , $X=Y=1,00$ m et $R=0$, fonctionnant en mode fléchissant posé (k_m et Z_m déterminés selon Miki).

En revanche, le modèle de calcul est tolérant vis-à-vis de la variabilité du module de Young. Il en serait de même pour le coefficient de Poisson qui pourrait varier dans des proportions notoires sans modifier radicalement l'allure de la courbe d'absorption.

- Avec la prise en compte du terme résistif R :



CP de 10 mm, plénum 100 mm amortie par une LdV de résistivité 10000 Pa.s/m², X=Y=1,00 m et fonctionnant en mode fléchissant posé (k_m et Z_m déterminés selon Miki).

Les résistances structurelles de plaque ou les fuites entre les raccords, réduisent l'efficacité du dispositif.

La résistance apportée par la laine minérale, partie réelle contenue par le terme complexe $jZ_m/\tan(k_m d)$ de l'expression (30), est de l'ordre de 800 Pa.s/m³ pour la configuration présente. Cette valeur d'amortissement est suffisante pour optimiser l'absorption du diagramme.

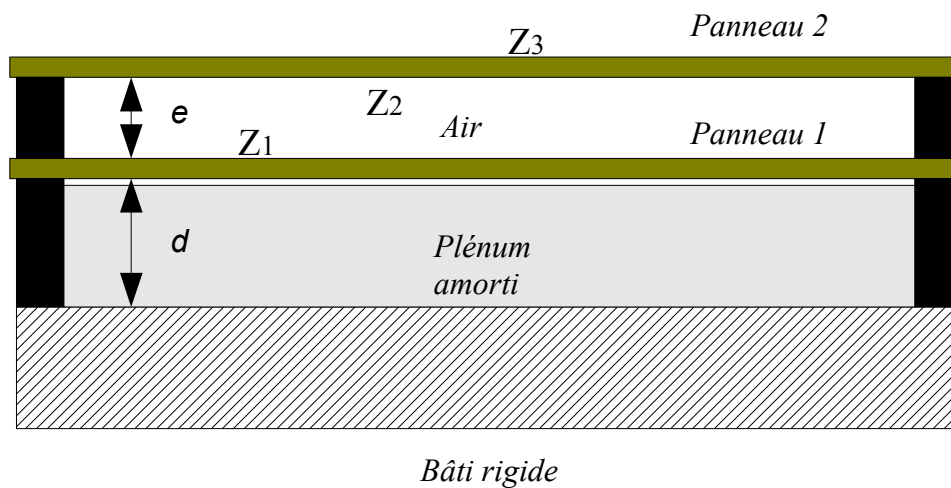
Néanmoins, en pratique, on peut réduire l'épaisseur de la laine minérale dans la cavité, pour prendre en compte l'amortissement supplémentaires amené par les fuites et les résistances structurelles. Cet apport est généralement de l'ordre de 600 Pa.s/m³ d'après Jacques Jouhaneau. Cependant, il convient d'être prudent et d'étudier l'incidence des grandeurs d'entrées au cas par cas!

Notons que la résistance de fuite sera non négligeable pour un mode posé en raison des nombreuses interstices pouvant exister entre les tasseaux supports et le panneau en raison de la pose lâche du panneau.

3) Modèle Fléchissant Superposé

a) Fréquences d'accord

Pour accroître la bande passante d'absorption et réduire ainsi le risque « d'absorber à côté », certains praticiens superposent deux panneaux séparés par une lame d'air. Le principe de fonctionnement, bien connu, est celui de l'oscillateur couplé non développé ici.



(Figure 3)

Les fréquences de résonances de chaque plaque, f_1 et f_2 s'estiment en fonction des fréquences « dites » bloquées f_{B1} et f_{B2} .

Pour le système non amorti, on admettra que :

Pour le panneau 1, intérieur :

$$f_2 > f_{B2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_2 + \rho_0 c^2 \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{d}\right)}{m_2}} \quad (31)$$

Pour le panneau 2, extérieur :

$$f_1 < f_{B1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_1 + \frac{\rho_0 c^2}{e}}{m_1}} \quad (32)$$

avec

- m_1 ou m_2 masses surfaciques des panneaux, exprimées en kg/m^2
- K_1 ou K_2 raideurs des plaques, par unité de surface, exprimées en N/m^3 , calculer d'après les expressions (22) ou (23) selon le mode de pose.

À l'usage, il faut chercher des fréquences bloquées suffisamment proches l'une de l'autre pour limiter l'effet d'anti-résonance.

Pour un système de panneau double correctement dimensionné, la bande active d'absorption est centrée, en première approximation (en négligeant la raideur de plaque et les termes résistifs), sur la fréquence :

$$f \approx 60 \sqrt{\frac{1}{e} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)} \quad (33)$$

La relation semi-empirique ci-après est davantage corrélée avec les mesures in situ et elle est souvent préférée par les praticiens :

$$f \approx 84 \sqrt{\frac{1}{e} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)} \quad (34)$$

Cependant, l'approche numérique décrite ci-après, est préférable !

b) Coefficient d'absorption du dispositif amorti

En utilisant la méthode de l'impédance ramenée, on montrerait que l'impédance Z_3 à l'interface air-panneau extérieur vaut :

$$Z_3 = R_2 + j \left(m_2 \omega - \frac{K_2}{\omega} \right) + Z_2 \quad (35)$$

avec Z_2 , l'impédance ramenée sur la face interne du panneau extérieur :

$$Z_2 = \frac{Z_1 + j \rho_0 c \tan(ke)}{1 + j \frac{Z_1}{\rho_0 c} \tan(ke)} \quad (36)$$

et Z_1 , l'impédance ramenée du fond de la cavité amortie sur le premier panneau, correspondant au panneau fléchissant simple :

$$Z_1 = R_1 + j \left(m_1 \omega - \frac{K_1}{\omega} - \frac{Z_m}{\tan(k_m d)} \right) \quad (37)$$

Au final, en combinant (35), (36) et (37), on obtient :

$$Z_3 = R_2 + j \left(m_2 \omega - \frac{K_2}{\omega} \right) + \frac{R_1 + j \left(m_1 \omega - \frac{K_1}{\omega} - \frac{Z_m}{\tan(k_m d)} \right) + j \rho_0 c \tan(ke)}{1 + j \frac{R_1 + j \left(m_1 \omega - \frac{K_1}{\omega} - \frac{Z_m}{\tan(k_m d)} \right)}{\rho_0 c} \tan(ke)} \quad (38)$$

avec toujours

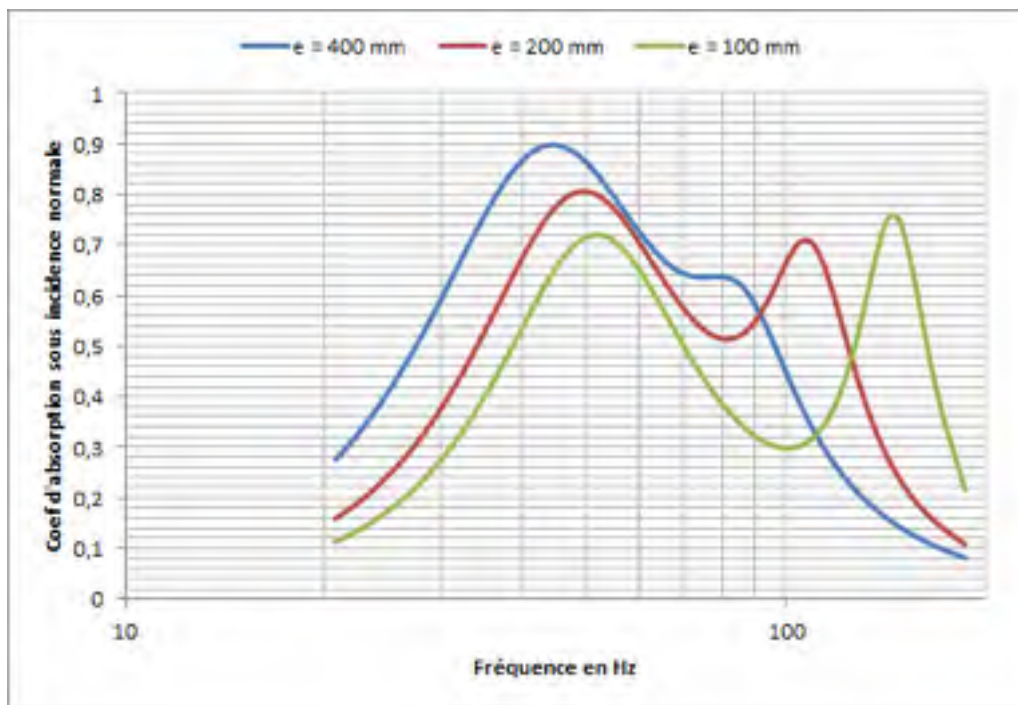
$$R_p = \frac{Z_3 - \rho_0 c}{Z_3 + \rho_0 c} \quad (39)$$

et

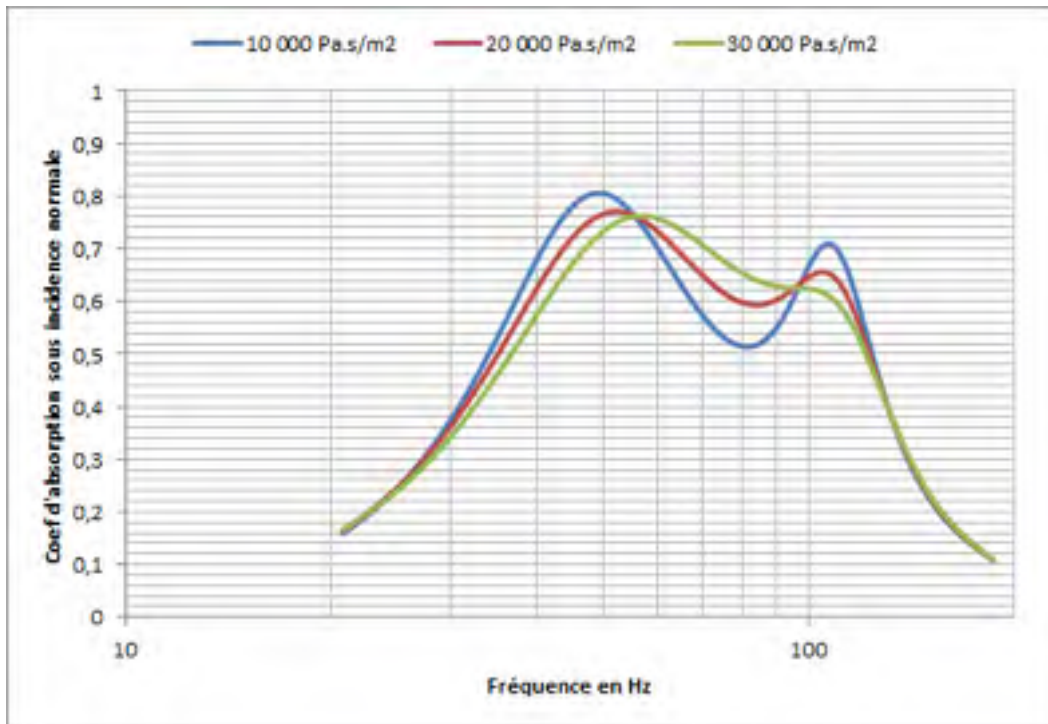
$$\alpha_n = 1 - |R_p|^2 \quad (40)$$

En faisant usage de la relation (38), il est difficile de faire le lien avec les formules usuelles (31), (32) ou (33) ! Soit l'auteur s'est trompé dans ses calculs, soit ses relations sont trop approximées pour constituer un modèle prévisionnel correct notamment parce que les termes résistifs n'interviennent pas (laine minérale, fuites, résistance structurelle).

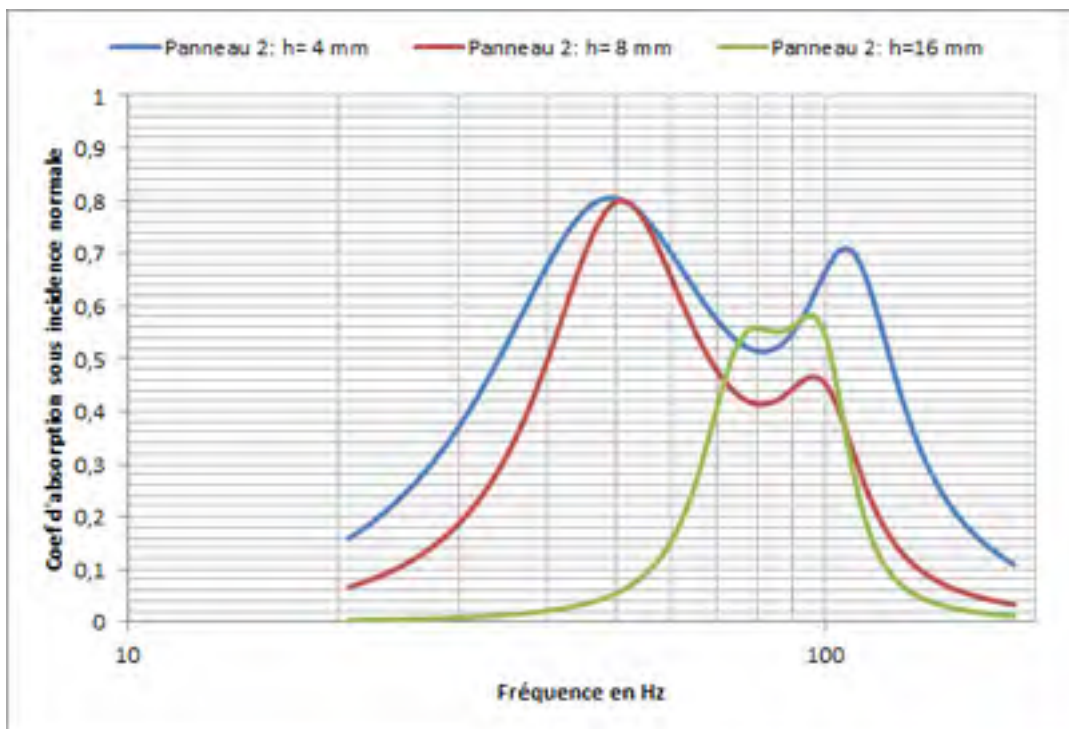
Les graphiques suivants renseignent sur l'absorption de doubles panneaux pour plusieurs configurations :



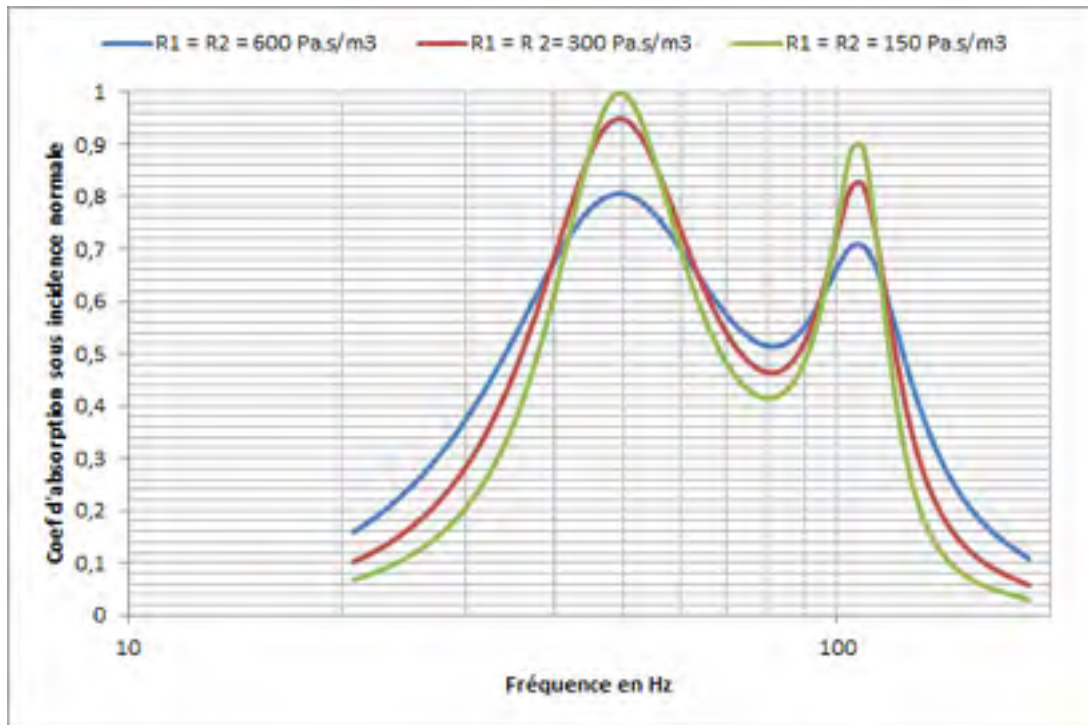
CP de 4 mm + plénum d'air e + CP de 8 mm + plénum de 200 mm amorti par une LdV de résistivité 30000 Pa.s/m², X=Y=1,00 m avec R₁=R₂=600 Pa.s/m³, fonctionnant en mode fléchissant encasté (k_m et Z_m déterminés selon Miki).



CP de 4 mm + plénum d'air 200 mm + CP de 8 mm + plénum de 200 mm **amorti par une LdV**, $X=Y=1,00$ m avec $R_1=R_2=600$ Pa.s/m³, fonctionnant en mode fléchissant encastré (k_m et Z_m déterminés selon Miki).



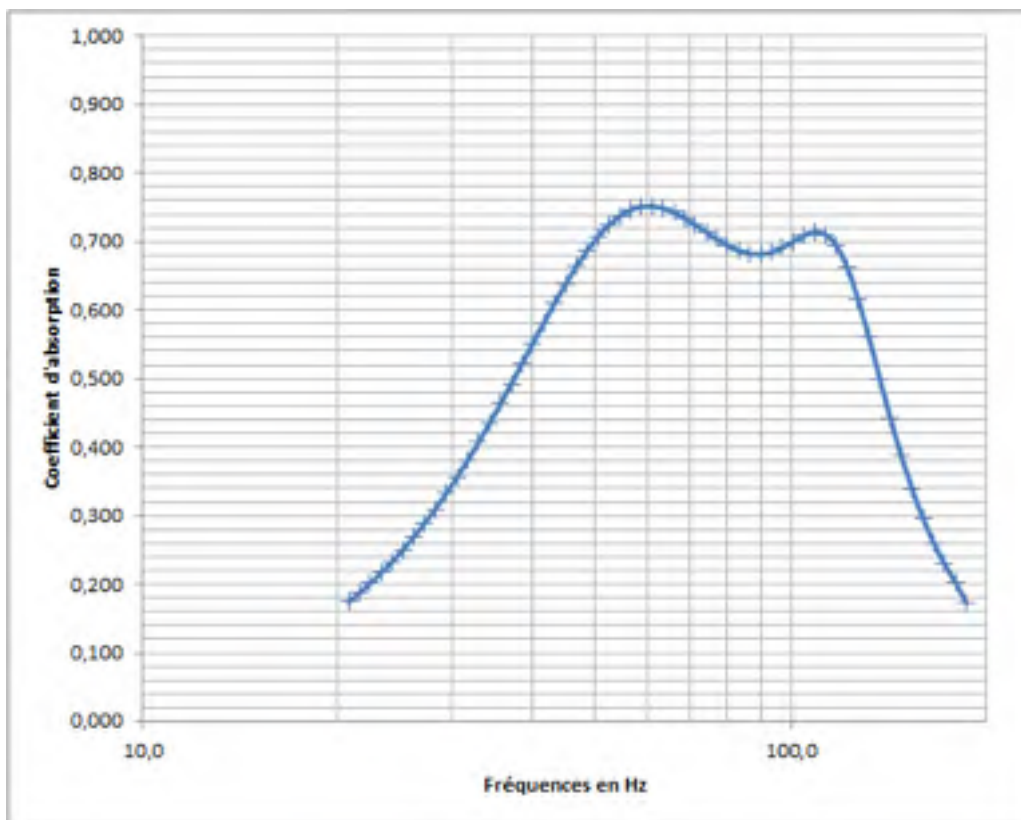
CP d'épaisseur h + plénum d'air 200 mm + CP de 8 mm + plénum de 200 mm **amorti par une LdV** de résistivité 10 000 Pa.s/m², $X=Y=1,00$ m avec $R_1=R_2=600$ Pa.s/m³, fonctionnant en mode fléchissant encastré (k_m et Z_m déterminés selon Miki).



CP de 4 mm + plénum d'air 200 mm + CP de 8 mm + plénum de 200 mm amorti par une LdV de résistivité 10 000 Pa.s/m², X=Y=1,00 m avec $R_1=R_2$, fonctionnant en mode fléchissant encastré (k_m et Z_m déterminés selon Miki).

On constate que le modèle de calcul est assez sensible à la variabilité des paramètres d'entrée, ce qui en pratique, sans moyens de mesure, présente un risque important de concevoir un dispositif déficient.

Le graphique ci-dessous donne la courbe d'absorption de la mise en parallèle de deux panneaux qui constituent un absorbeur optimisé pour la bande de fréquences 50-120 Hz, au moins en théorie. Malheureusement, l'épaisseur du dispositif est important, avec 41 cm, pour un coefficient d'absorption sous incidence normale de l'ordre de « seulement » 0,7.



CP de 3 mm + plénum d'air 200 mm + CP de 8 mm + plénum de 200 mm amorti par une LdV de résistivité 30000 Pa.s/m², X=Y=1,00 m avec R₁=R₂=600 Pa.s/m³, fonctionnant en mode fléchissant encastré (k_m et Z_m selon déterminés Miki).

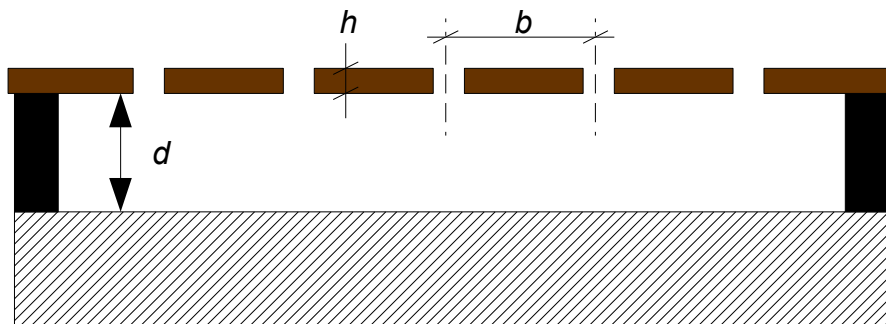
À la conception, il sera difficile d'obtenir un diagramme fidèle à la théorie compte tenu des nombreux biais existants, liés d'une part à l'imperfection du modèle physique qui ne traduit que partiellement la réalité, et d'autre part aux grandeurs d'entrées inconnues comme les termes résistifs ou les modes de pose, pas forcément bien définis.

En conséquence, il paraît hasardeux de se fier au seul modèle théorique du diagramme superposé pour concevoir un système efficace sans autres moyens de mesure.

4) Diagramme Perforé

L'utilisation de diagrammes perforés est habituel en correction acoustique pour le traitement des fréquences médium. Il pourrait être intéressant de combiner l'effet membrane de la plaque avec l'effet des résonateurs de Helmholtz d'un diagramme perforé. Cela avec l'idée de rapprocher les deux fréquences de résonance des modes, fléchissant & Helmholtz, afin d'élargir la bande absorbante du dispositif. Mais, il n'existe pas à ma connaissance, de modèle d'absorption associant les deux phénomènes physiques dans un même modèle analytique. Essayons toutefois de faire le tour de la question !

a) Fréquence d'accord du diagramme perforé non amorti



Bâti rigide

(Figure 4)

On admettra que la fréquence d'accord, notée f_0 , du système masse-ressort constitué par des perforations circulaires, est donnée par la relation :

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{d \left(h + \frac{8a}{3\pi} \right)}} \quad (41)$$

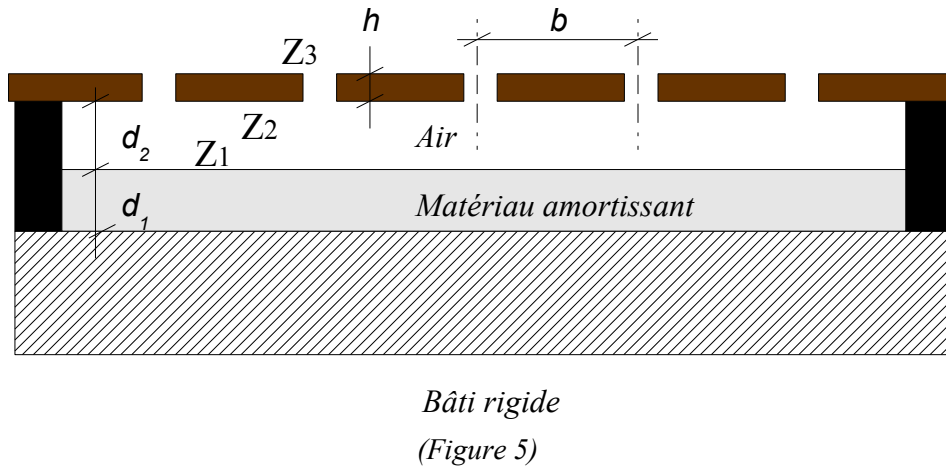
avec :

- a rayon des perforations circulaires, exprimé en m
- d profondeur de la cavité, exprimée en m
- h épaisseur de la plaque, exprimée en m, supposée rigide et immobile
- ε taux de perforation de la plaque ou porosité, sans dimension

Pour des trous disposés en carré et séparés par une distance b , on a $\varepsilon = \frac{\pi a^2}{b^2}$ (42)

Notons que l'expression (41) tient compte de la masse de rayonnement de chaque trou décrite par la relation (6). Mais elle ignore la présence d'un matériau amortissant dans la cavité. De plus, on suppose que la plaque est parfaitement rigide et immobile afin de modéliser le fonctionnement Helmholtz uniquement.

b) Coefficient d'absorption du diagramme perforé amorti



En faisant encore une fois usage de la méthode de l'impédance ramenée, on admettra que :

Z_1 , impédance ramenée du fond de la cavité supposée rigide, à l'interface matériau amortissant-air, s'écrit :

$$Z_1 = -j \frac{Z_m}{\tan(k_m d_1)} \quad (43)$$

Puis Z_2 , impédance ramenée du fond de la cavité, sur la face intérieure de la plaque perforée s'exprime par :

$$Z_2 = \frac{Z_1 + j\rho_0 c \tan(kd_2)}{1 + j \frac{Z_1}{\rho_0 c} \tan(kd_2)} \quad (44)$$

Enfin Z_3 est l'impédance de la plaque perforée chargée :

$$Z_3 = \frac{\rho_0}{\varepsilon} \left(\frac{h}{2a} + 1 \right) \sqrt{8\nu\omega + (2\delta a + h)} \frac{j\omega\rho_0}{\varepsilon} + Z_2 \quad (45)$$

avec

- ε taux de perforation de la plaque ou porosité, sans dimension
- ρ_0 est la masse volumique de l'air ; $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$
- h épaisseur de la plaque, exprimée en m
- ν viscosité cinématique de l'air ; $\nu = 0,000015 \text{ m}^2/\text{s}$

- a rayon des perforations, exprimé en m
- δ correction d'extrémité (liée à la masse de rayonnement) ;
 $\delta = 0,8(1 - 1,47 \varepsilon^{1/2} + 0,47 \varepsilon^{3/2})$

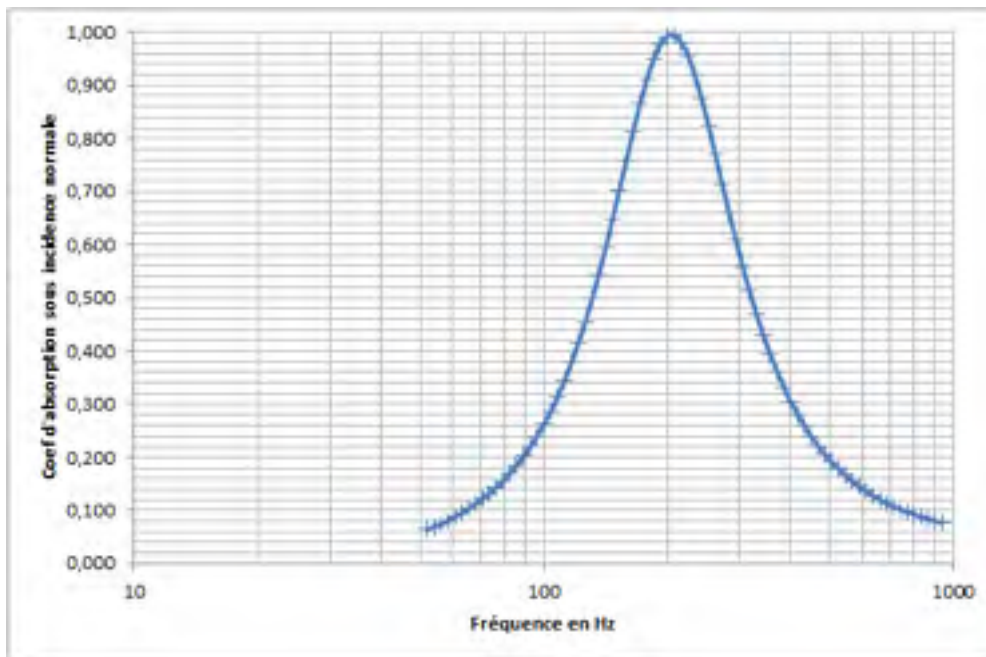
Le coefficient de réflexion en pression s'écrit toujours :

$$R_p = \frac{Z_3 - \rho_0 c}{Z_3 + \rho_0 c} \quad (46)$$

puis

$$\alpha_n = 1 - |R_p|^2 \quad (47)$$

Par exemple, pour une plaque de 10 mm d'épaisseur devant un plénum amorti de 100 mm, on obtient un maximum d'absorption vers 205 Hz pour un taux de perforation de 3 %.



Plaque de 10 mm, plénum 100 mm amorti par une LdV de résistivité 10000 Pa.s/m², taux de perforation $\varepsilon = 3,1\%$, \varnothing des trous 10 mm.

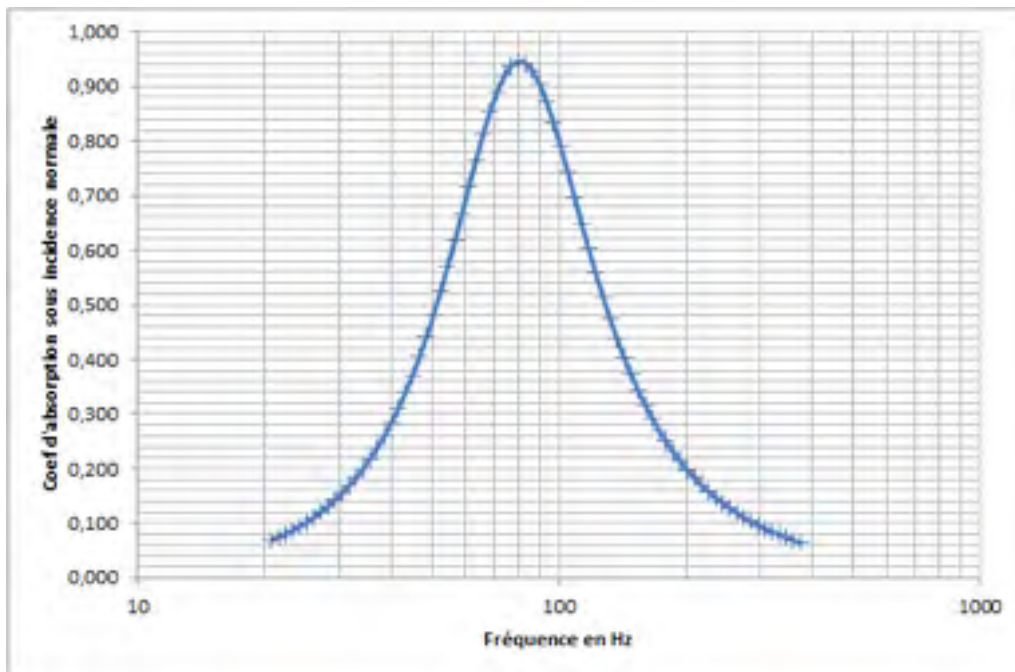
Insistons sur le fait que le modèle d'absorption figurant ci-dessus ne considère que le fonctionnement en mode Helmholtz dû à la perforation de la plaque. Le fonctionnement fléchissant ou piston de la plaque, qui en réalité ne manquera pas de se produire, n'est pas pris en compte dans le résultat. Dès lors, il serait tentant de pouvoir inclure au fonctionnement du panneau perforé, un terme correspondant au fonctionnement avec effet fléchissant de la plaque. L'idée étant, de tenter d'élargir la bande d'absorption d'une membrane en y incluant des perforations.

Au préalable, indiquons sommairement les variations de la fréquence d'accord f_0 d'un panneau perforé en fonction des principaux paramètres.

La fréquence d'accord est déplacée vers le bas avec :

- la diminution du diamètre des trous $\varnothing = 2a$
- l'augmentation :
 - de la profondeur du plénum d
 - de l'épaisseur de la plaque h
 - du taux de perforation ε
 - de l'écart entre les perforations b

Par exemple, pour une plaque de 10 mm d'épaisseur devant un plénum amorti de 200 mm, on obtient un maximum d'absorption théorique vers 80 Hz pour un taux de perforation de 0,8 %.



Plaque de 10 mm, plénum 200 mm amorti par une LdV de résistivité 10000 Pa.s/m², taux de perforation $\varepsilon = 0,8\%$, \varnothing des trous 5 mm.

5) Diagramme perforé en fonctionnement hybride, Helmholtz & Membrane

a) Modèle simplifié

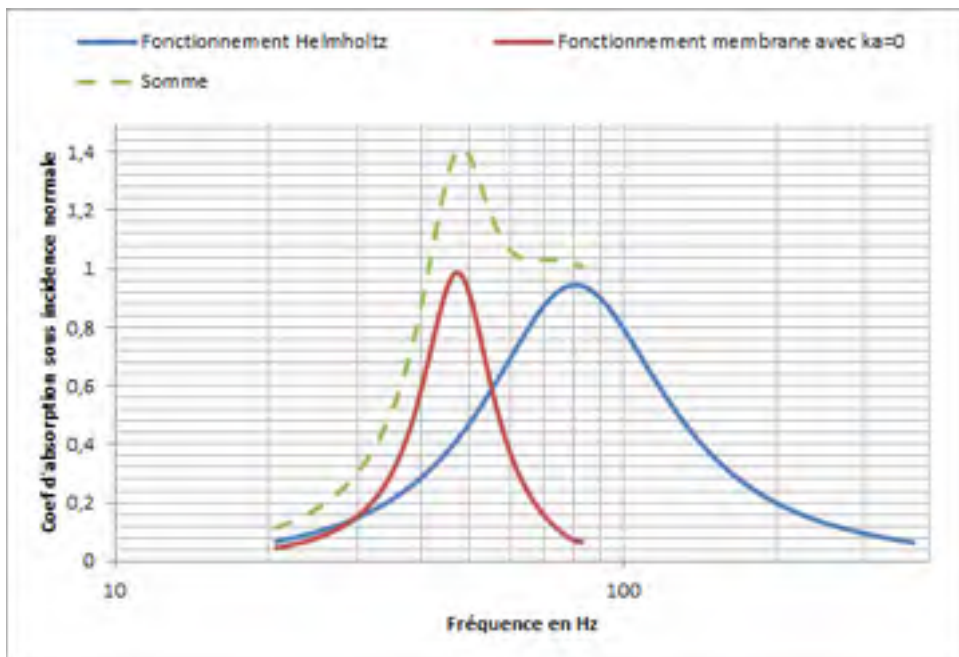
En première approximation, l'on peut estimer l'effet « membrane » d'un panneau perforé en négligeant la raideur de l'air de la cavité k_a qui n'a plus lieu d'être en raison des perforations de la plaque qui annihilent le phénomène de compression. Pour cela, il est nécessaire que le taux de perforation soit suffisamment important et le diamètre des trous pas trop petit. Cela revient à ne prendre en compte que les termes de raideur de plaque K_{II} et de masse surfacique du panneau m_s , dans le fonctionnement fléchissant de la membrane. Avec cette hypothèse, la fréquence d'accord de la membrane s'obtient d'après :

$$f_{\text{membrane}} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{II}}{m_s}} \quad (46)$$

où la raideur de plaque K_{II} se détermine à l'aide des relations (23), (25) et (26).

Par ailleurs, le coefficient d'absorption sous incidence normale du panneau fléchissant donné par la relation (30) devient, avec $k_a \approx 0$:

$$\alpha_n \approx 1 - \left| \frac{R + j \left(m_s \omega - \frac{K_{II}}{\omega} \right) - \rho_0 c}{R + j \left(m_s \omega - \frac{K_{II}}{\omega} \right) + \rho_0 c} \right|^2 \quad (47)$$



Plaque de CP de 10 mm, plénum 200 mm amorti par une LdV de résistivité 10000 Pa.s/m², taux de perforation $\varepsilon = 0,8\%$, \varnothing des trous 5 mm, $X=Y=1,00$ m, $R=0$ et fonctionnant en mode fléchissant encastré (k_m et Z_m déterminés selon Miki).

On suppose dans le cas présent, que le fonctionnement Helmholtz n'est pas perturbé par les mouvements fléchissants de la membrane, ce qui ne sera certainement pas le cas dans la réalité. Excepté si les fréquences d'accord, membrane et Helmholtz, sont suffisamment éloignées l'une de l'autre !

Avec la configuration précédente, on espère conjuguer les deux effets entre 50 et 80 Hz environ.

b) Modèle avec mise en parallèle des impédances de plaque

Trevor J. Cox et Peter D'Antonio suggèrent dans leur ouvrage *Acoustic Absorbers and Diffusers* de réaliser une mise en parallèle des impédances de plaque, Helmholtz & Membrane, pour établir l'expression de l'impédance équivalente.

$$Z_{\text{equivalente}} = \frac{Z_{\text{membrane}} Z_{\text{Helmholtz}}}{Z_{\text{membrane}} + Z_{\text{Helmholtz}}} \quad (48)$$

- avec pour la plaque perforée fonctionnant en mode **piston** parfait, auquel a été ajouté la raideur de la plaque pour y associer un fonctionnement fléchissant:

$$Z_{\text{membrane}} = R + j \left(m_s \omega - \frac{K_{II}}{\omega} \right) \quad (49)$$

- et pour la plaque perforée fonctionnement en mode **Helmholtz** :

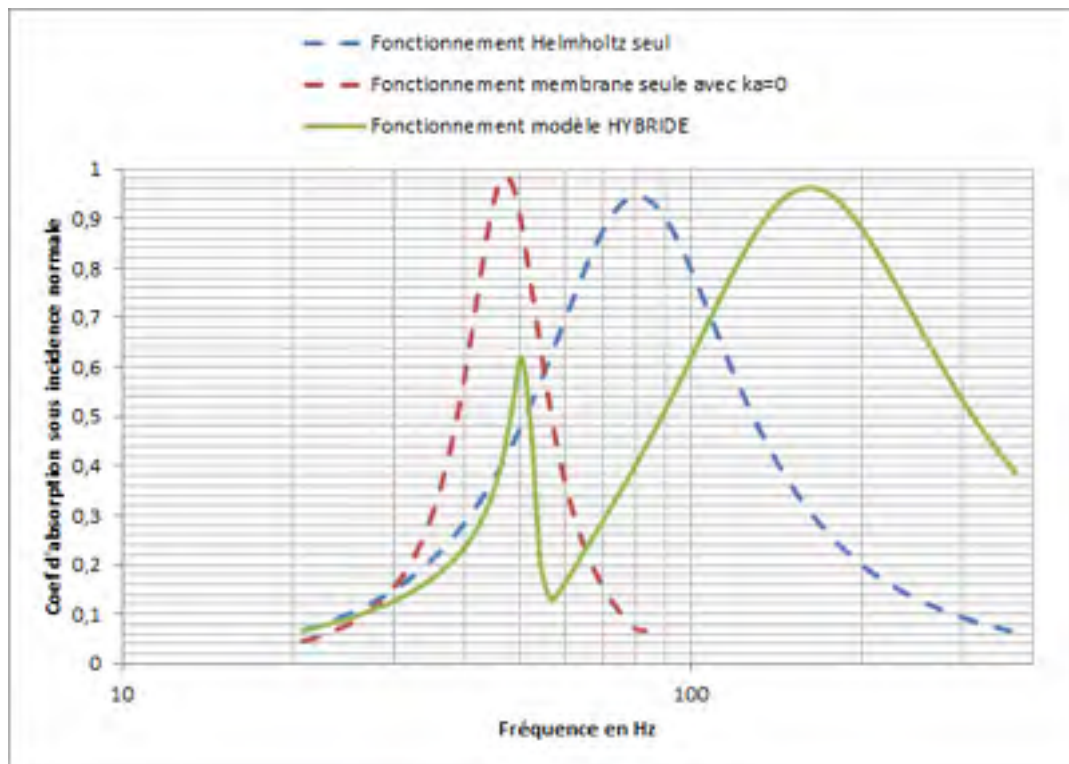
$$Z_{\text{Helmholtz}} = \frac{\rho_0}{\varepsilon} \left(\frac{h}{2a} + 1 \right) \sqrt{8\nu\omega} + (2\delta a + h) \frac{j\omega\rho_0}{\varepsilon} \quad (50)$$

avec rappelons le :

- ε taux de perforation de la plaque
- ρ_0 est la masse volumique de l'air ; $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$
- h épaisseur de la plaque, exprimée en m
- ν viscosité cinématique de l'air ; $\nu = 0,000015 \text{ m}^2/\text{s}$
- a rayon des perforations, exprimé en m
- δ correction d'extrémité : $\delta = 0,8(1 - 1,47 \varepsilon^{1/2} + 0,47 \varepsilon^{3/2})$

Puis charger, l'impédance équivalente par sa cavité arrière selon la figure 5, et en faisant usage des relations (44) et (46) :

$$Z_3 = Z_{\text{équivalente}} + \frac{j \left[\frac{-Z_m}{\tan(k_m d_1)} + \rho_0 c \tan(k d_2) \right]}{1 + \frac{Z_m \tan(k d_2)}{\rho_0 c \tan(k_m d_1)}}$$



Plaque de CP de 10 mm, perforation $\varepsilon = 0,8\%$, \varnothing des trous 5 mm plénum 200 mm amortie par une LdV de résistivité 10000 Pa.s/m^2 , $X=Y=1,00 \text{ m}$, $R=0$ et fonctionnant en mode fléchissant encastré (k_m et Z_m déterminés selon Miki).

Le modèle d'absorption hybride avec mise en parallèle des impédances selon (48), (49) et (50) montre bien la résonance de la membrane à la « bonne » fréquence mais induit un décalage important, d'une octave environ, pour l'accord de la plaque perforée en mode Helmholtz ! L'effet conjugué attendu n'a eu pas lieu !

Il n'est cependant pas exclu que le modèle suggéré par Trevor J. Cox et Peter D'Antonio, soit fautif. En effet, dans *Acoustic Absorbers and Diffusers*, les auteurs sont assez peu prolixes sur cette construction strictement mathématique qui n'a fait l'objet d'aucun développement. En conséquence,



le modèle hybride doit être considéré avec la plus grande prudence.

6) Conclusion

Les calculs effectués, avec le modèle prenant en compte la raideur du panneau et la présence du matériau absorbant dans la cavité, ont permis de montrer que les écarts sur les fréquence d'accord, notamment avec la formule simplifiée, étaient importants : de quelques Hertz dans le meilleur des cas, à plusieurs dizaines de Hertz pour des situations défavorables. Étant donné qu'un mode propre tient dans quelques Hertz, l'utilisation d'un diagramme accordé pour réduire un mode présente un risque d'absorber à côté.

Malgré tout, on peut espérer minimiser les incertitudes en prenant certaines précautions de conception. Ainsi pour obtenir une fréquence d'accord presque correcte, il est nécessaire de se rapprocher le plus possible d'un diagramme fonctionnant en mode piston parfait afin de pouvoir négliger les effets de raideur de panneau, notamment.

Pour cela, il est préférable de faire un diagramme :

- de grandes dimensions
- proche de la forme carrée
- posé en mode lâche
- avec une plaque de faible épaisseur (typiquement inférieure à 10 mm pour du CP)
- avec une profondeur de cavité pas trop grande

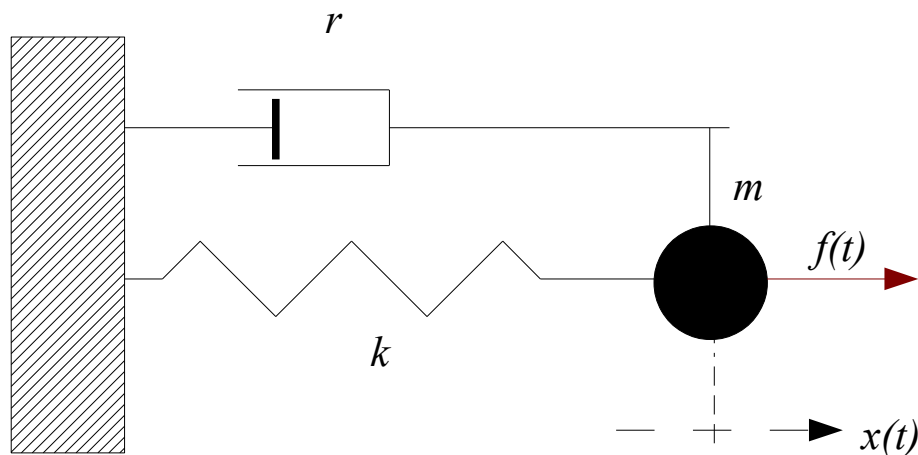
Il est cependant possible d'acquérir des dispositifs pré-accordés à l'atelier notamment auprès de la société Akustar de *Jean-Pierre Lafont*.

Annexe A

L'oscillateur harmonique en régime forcé Impédance mécanique

L'oscillateur élémentaire mécanique, qui est modélisé par un résonateur, est constitué d' :

- une **masse m** indéformable
- un ressort (sans masse), de **raideur k** , qui fournit une force de rappel kx
- un amortisseur, de **constante d'amortissement r** , qui fournit une force de freinage rv



Ce résonateur est excité par l'intermédiaire d'une force extérieure $f(t)$.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse m s'écrit :

$$m \vec{a} = \Sigma \vec{F}$$

Les forces de rappel et de freinage s'opposent au mouvement. Avec les conventions d'écriture suivantes :

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \text{et} \quad a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

L'équation de Newton devient :

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + f(t)$$

soit encore

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = f(t) \quad (A1)$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants où x est le déplacement de la masse.

Reprenons l'équation (A1) avec une force extérieure harmonique, c'est-à-dire sinusoïdale, de pulsation ω que l'on écrira sous sa forme complexe : $f(t) = Fe^{j\omega t}$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = Fe^{j\omega t} \quad (A2)$$

Nous admettons, que la force finit par imposer sa pulsation au mouvement de la masse, c'est le **régime permanent ou établi**.

Cherchons une solution permanente, c'est-à-dire sans terme transitoire, de la forme complexe :

$$x(t) = Xe^{j\omega t} \quad (A3)$$

Nous pouvons exprimer l'équation (A2) en fonction de la vitesse de la masse, notée $\dot{x}(t)$

En dérivant deux fois $x(t)$ par rapport à t , il vient :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d[Xe^{j\omega t}]}{dt} = j\omega X e^{j\omega t} = j\omega x(t)$$

$$\text{d'où } x(t) = \frac{\dot{x}(t)}{j\omega} = \frac{-j\dot{x}(t)}{\omega}$$

puis

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 X e^{j\omega t} = j\omega \dot{x}(t)$$

Et en substituant x et \dot{x} , l'équation (A2), devient après mise en facteur:

$$\dot{x} \left[r + j \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) \right] = F$$

Soit encore avec $v = \dot{x}$,

$$r + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) = \frac{F}{v}$$

Par définition, l'**impédance mécanique** de l'oscillateur vaut :

$$Z_{\text{mécanique}} = \frac{F}{v} = r + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)$$

L'amplitude du mouvement de la masse dépend des caractéristiques du résonateur, c'est-à-dire des constantes m , k et r contenues dans l'impédance mécanique du système.

Remarquons que l'impédance mécanique est homogène à une force divisée par une vitesse et s'exprime donc, en Nsm^{-1} .

Annexe B

Notion d'impédance acoustique spécifique

En acoustique, la force est le plus souvent une force de pression et on préfère utiliser l'**impédance acoustique spécifique**, notée Z , définie en fonction de la pression p par :

$$Z = \frac{p}{v} = \frac{F}{Sv} = \frac{Z_{\text{mécanique}}}{S}$$

Dans le cas présent, S représente l'aire de la membrane exprimée en m^2 . Ainsi l'impédance acoustique spécifique s'exprime en Nsm^{-3}

On admettra que l'impédance mécanique de la membrane chargée par sa cavité, notée Z_0 , s'écrit :

$$Z_0 = Z_{\text{memb seule}} + Z_{\text{Ri}} = Z_{\text{memb seule}} + SZ_s$$

Où

- $Z_{\text{memb seule}}$ est l'impédance mécanique de la membrane seule
- Z_{Ri} est l'impédance de rayonnement interne induite par la cavité
- Z_s est l'impédance acoustique spécifique de la cavité

En divisant cette dernière expression par S , on obtient une expression homogène à une impédance acoustique spécifique.

Ainsi l'impédance acoustique spécifique de la membrane chargée par sa cavité, notée Z'_0 , est toujours de la forme.

$$Z'_0 = r + j\left(m_s \omega - \frac{k}{\omega}\right) + Z_s$$

Où les grandeurs Z'_0 , r , et Z_s s'exprime maintenant en Nsm^{-3}

m représente une masse surfacique exprimée en kgm^{-2} et k la raideur par unité de surface en Nm^{-3}



Bibliographies :

Acoustic Absorbers and Diffusers, theory, design and application de Trevor J. Cox et Peter D'Antonio (édition Taylor & Francis Group)

Acoustique des salles et sonorisation de Jacques Jouhaneau (éditions TEC & DOC)

Audio de Mario Rossi (Presse Polytechniques et Universitaires Romandes)

Cours CNAM ACC103 « acoustique des salles et bâtiments » de Manuel Melon

Notion élémentaires d'acoustique de Jacques Jouhaneau (éditions TEC & DOC)